Решение заданий муниципального этапа Республиканской олимпиады школьников по математике 01.12.2018

9 класс

1. Графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$ пересекаются. Найдите абсциссу точки пересечения.

Решение. Искомая абсцисса является решением уравнения $kx + b = bx + k$. Это уравнение приводится к виду: $(k - b)x = k - b$. Так как данные графики пересекаются (а не совпадают), то $k \neq b$, поэтому $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

2. Известно, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 3$. Найдите значение выражения $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Решение. Запишем: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$. По условию это равно 3, значит, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{3}{2}$. Тогда получаем: $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$.

Ответ: $\frac{13}{6}$.

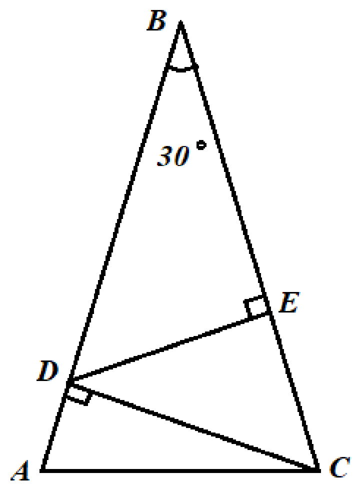
3. Пусть D- дискриминант приведенного квадратного трёхчлена $x^2 + ax + b$. Найдите корни трёхчлена, если известно, что они различны и один из них равен D, а другой равен $2D$.

Решение. По теореме Виета $\begin{cases} b = D \cdot 2D = 2D^2 \\ a = -(D + 2D) = -3D \end{cases}$, т.е. трёхчлен равен $x^2 - 3Dx + 2D^2$.

Его дискриминант $D = (-3D)^2 - 4 \cdot 2D^2$, откуда $D = D^2$, т.е. $D = 0$ (в этом случае оба корня одинаковы и равны 0, что не удовлетворяет условию) или $D = 1$ (в этом случае корни равны 1 и 2).

Ответ: 1 и 2.

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30°, $AB = BC = 6$ см. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC. Найдите длину BE.



Решение. Из прямоугольного треугольника DBC катет против угла $30°$ равен половине гипотенузы: $DC = 0,5BC = 3$ см (см. рисунок). Кроме того, $\angle DCB = 90^\circ - \angle DBC = 60^\circ$, $\angle CDE = 30°$, следовательно, из прямоугольного ΔDEC, катет против угла $30°$ также равен половине гипотенузы: $CE = 0,5DC = 1,5$ см.

Таким образом, $BE = BC - CE = 4,5$ см.

Ответ: 4,5 см.

5. Квадрат 8×8 разрезали на квадраты 2×2 и прямоугольники 1×4. При этом общая длина распилов оказалась равна 54. Сколько фигурок каждого вида получилось?

Решение. В квадрате 8×8 - 64 клетки, а в каждой из полученных фигурок – по 4 клетки. Поэтому всего получилось 16 фигурок. Найдём сумму периметров всех получившихся фигурок. Так как граница каждого распила входит в периметр двух фигурок, то прибавим к периметру квадрата удвоенную длину распилов: $32+2\cdot54=140$. Периметр квадрата 2×2 равен 8, а периметр прямоугольника 1×4 равен 10, то есть на 2 больше. Если бы все 16 фигурок были квадратами, то их суммарный периметр был бы равен $16\cdot8=128$. Это на $140-128=12$ меньше, чем на самом деле. Для увеличения общего периметра на 12 требуется 6 квадратов заменить на прямоугольники. Поэтому прямоугольников было 6, а квадратов – 10.

Ответ: 10 квадратов и 6 прямоугольников.