Министерство образования и науки Донецкой Народной Республики
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет»
Донецкий республиканский институт дополнительного педагогического образования

Решения заданий заключительного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике

10 класс

1. Решить уравнение: $|x|\cdot\sqrt{x^2-9}+x\cdot\sqrt{x^2-9}=0$

Решение. Найдем область допустимых значений из неравенства $x^2-9\geq 0$; $(x-3)(x+3)\geq 0$; $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. Преобразуем левую часть уравнения: $\sqrt{x^2-9}(|x|+x)=0$. Тогда либо $\sqrt{x^2-9}=0$, либо $|x|+x=0$. Из первого уравнения $x=\pm3$, а из второго – $|x|=-x$, то есть $x\in(-\infty;0]$. С учетом ОДЗ получаем ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup\{3\}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup\{3\}$.

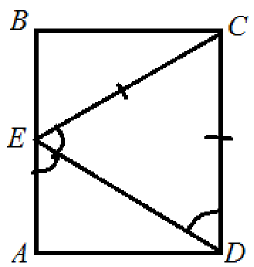
2. Шестизначное число x заканчивается на цифру 2. Если эту цифру перенести в начало числа, то число уменьшится в три раза. Найти число x.

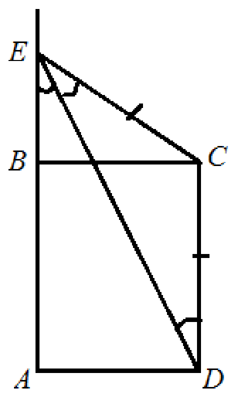
Решение. Запишем число x в виде $x=\overline{a2}$, где a – некоторое пятизначное число. По условию $\overline{a2}=3\cdot\overline{2a}$, то есть $10a+2=3\cdot(200000+a)$. Отсюда $599998=7a$. Тогда $a=85714$ и $x=857142$.

Ответ: 857142.

3. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED=\angle DEC$. Найдите AE.

Решение. Поскольку точка E выбрана на прямой AB, она может лежать либо между точками A и B, либо по одну сторону от них (см. рисунки), причем за точку B (иначе не выполняется условие $\angle AED=\angle DEC$). Тогда $\angle AED=\angle EDC$, как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD. Значит, треугольник ECD – равнобедренный и $CE=2$. Тогда, по теореме Пифагора из треугольника BCE, $BE=1$, а $AE=1$ или $AE=3$.





Ответ: 1 или 3.

4. На координатной плоскости изображен график функции $y = x^2$. Провели 2017 прямых, каждая из которых параллельна прямой $y = x$ и пересекает исходный график в двух точках. Найдите сумму абсцисс всех точек пересечения прямых с исходным графиком.

Решение. Прямая, параллельная прямой $y = x$, задается уравнением: $y = x + a$. Поскольку эта прямая пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках, уравнение $x^2 = x + a$ или $x^2 - x - a = 0$ имеет два различных корня. По теореме Виета сумма этих корней равна 1. Это и есть сумма абсцисс двух точек пересечения прямой с параболой. Каждая из 2017 прямых обладает точно таким же свойством. Поэтому, сумма абсцисс всех точек пересечения прямых с исходным графиком равна 2017.

Ответ: 2017.

5. Какое наименьшее количество трехклеточных уголков нужно покрасить в квадрате 6×6 так, чтобы больше нельзя было покрасить ни одного уголка (уголки не должны перекрываться)?

Решение. Предположим, что в квадрате 6×6 покрасили несколько уголков и больше ни одного уголка покрасить нельзя. Разобьем квадрат 6×6 на 9 квадратиков 2×2. Понятно, что в каждом таком квадратике не менее двух клеток окрашено (если окрашена только одна или ни одной, в этом квадратике можно окрасить еще один трехклеточный уголок). Поскольку квадратиков 2×2 всего 9, окрашенных клеток не менее 18. Это означает, что окрашенных трехклеточных уголков не менее 6. Пример с шестью окрашенными уголками, когда нельзя больше окрасить ни одного, приведен на рисунке.