## *ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ*

Признаки делимости позволяют в некоторых случаях быстро установить, делится ли одно число на другое, не выполняя непосредственное деление.

Перечислим некоторые признаки делимости, связанные с десятичной записью числа:

***Признак делимости на 2:*** число делится на 2 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на четную цифру;

***Признак делимости на 3 (на 9):*** число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9);

***Признак делимости на 4:*** число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4;

***Признак делимости на 5:*** число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или на 5;

***Признак делимости на 8:*** число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8;

***Признак делимости на 11:*** число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа, стоящих на четных местах, и сумма цифр, стоящих на нечетных местах, дают одинаковые остатки при делении на 11.

***Пример 1.*** Делится ли число $\underbrace{44...444}_{100\ цифр}$ на 8?

***Решение.*** Число, образованное тремя последними цифрами – это 444. По признаку делимости данное число не делится на 8 поскольку 444 не делится на 8.
***Ответ:*** Нет.

***Пример 2.*** Найти две последние цифры числа 82∗∗, если оно делится на 90.

***Решение.*** Разложим 90 на множители так: $90 = 9 \cdot 10$. Число делится на 10, значит, оканчивается нулем. Поскольку оно делится и на 9, третья цифра может равняться только 8 (иначе сумма цифр числа не делится на 9).
***Ответ:*** это число 8280.

***Пример 3.*** Найти цифры $x$ и $y$ числа $\overline{42x4y}$, если это число делится на 72.

***Решение.*** Разложим 72 на множители так: $72 = 9 \cdot 8$. Числа 9 и 8 взаимно просты, поэтому, чтобы условие удовлетворялось, достаточно проверить признаки делимости на 9 и на 8. Сумма цифр числа должна делится на 9, поэтому, $x + y$ равно либо 8, либо 17 (при этом сумма цифр числа равна либо 18, либо 27).

Если $x + y = 17$, цифры $x$ и $y$ – это 8 и 9 (никакие другие две цифры в сумме не дают 17). Поскольку $y$ – это четная цифра (это необходимо, чтобы число делилось на 8), искомое число должно быть равно 42948. Но это число не делится на 8.

Если $x + y = 8$, по признаку делимости на 4, $y$ может равняться только 0, 4 или 8. Тогда цифра $x$ равна 8, 4 или 0 соответственно. Из чисел 42048, 42444, 42840 на 8 делятся только 42048 и 42840.

***Ответ:*** $x = 0; y = 8$ или $x = 8; y = 0$.

***Пример 4.*** На доске написано число 321321321321. Какие цифры необходимо стереть, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9? Чему равно это наибольшее число?

***Решение.*** Сумма цифр данного числа равна 24. После стирания цифр должно остаться число с суммой цифр, кратной 9. Поскольку мы ищем наибольшее из таких чисел, сумма его цифр должна быть равна 18. Значит, сумма стертых цифр должна быть равна 6. Чтобы оставшееся число было как можно больше, количество стертых цифр должно быть как можно меньше. Значит, нужно стереть две тройки. Оставшееся десятизначное число будет больше, если в старших разрядах оно содержит большие цифры. Поэтому, нужно стирать две последние тройки. Оставшееся число – 3213212121.

***Ответ:*** две последние тройки; 3213212121.

***Пример 5.*** Доказать, что нет целых чисел (отличных от нуля), которые от перестановки начальной цифры в конец увеличиваются

а) в 5 раз; б) в 6 раз; в) в 8 раз?

***Решение.*** а) Если бы существовало число, увеличивающееся в 5 раз от перестановки начальной цифры в конец, то оно начиналось бы с 1 (если бы оно начиналось с другой ненулевой цифры, то число, в 5 раз большее имеет большее количество знаков в своей записи). Но число, оканчивающееся на 1, не может быть в 5 раз больше никакого целого числа. В пунктах б) и в) точно такое же рассуждение.

***Пример 6.*** Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными и получил $АБ \cdot ВГ = ДДЕЕ$. Докажите, что он ошибся.

***Решение.*** Число $ДДЕЕ$ делится на 11, поскольку суммы цифр на четных и нечетных местах одинаковы. Но левая часть равенства не делится 11, поскольку в двузначных числах $АБ$ и $ВГ$ цифры разные. Поэтому, правая и левая части не равны друг другу.

***Пример 7.*** $А$ – шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Доказать, что $А$ не делится на 11.

***Решение.*** Разобьем 6 данных чисел на две тройки всеми возможными способами: 1, 2, 3 и 4, 5, 6; 1, 2, 4 и 3, 5, 6; 1, 2, 5 и 3, 4, 6; 1, 2, 6 и 3, 4, 5; 1, 3, 4 и 2, 5, 6; 1, 3, 5 и 2, 4, 6; 1, 3, 6 и 2, 4, 5; 1, 4, 5 и 2, 3, 6; 1, 4, 6 и 2, 3, 5; 1, 5, 6 и 2, 3, 4. В каждом из этих разбиений суммы чисел в группах дают разные остатки при делении на 11. Поэтому, как бы мы ни составили шестизначное число, оно не будет делиться на 11.

***Пример 8.*** Число 11...11 делится на 7. Доказать, что оно делится на 13.

***Решение.*** Проверка показывает, что число, в записи которого 6 единиц, делится на 7, а числа, записываемые меньшим числом единиц, на 7 не делятся. Поэтому, понятно, что такое число делится на 7 только если число единиц в его записи кратно 6. А такое число делится на $111111 = 1001 \cdot 111 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 37$.

***Пример 9.*** Трехзначное число приписали к такому же трехзначному числу. Доказать, что полученное шестизначное число делится на 7, на 11 и на 13.

***Решение.*** Представим шестизначное число в виде $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001$. Поскольку $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, это число делится на 7, на 11 и на 13.

***Пример 10.*** Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Доказать, что его предпоследняя цифра нечетна.

***Решение.*** Поскольку последняя цифра – 6, то возводимое в квадрат число четно. Так как квадрат четного числа делится на 4, число образованное двумя последними цифрами, должно делится на 4. Запишем все двузначные числа, делящиеся на 4 и оканчивающиеся на 6: 16; 36; 56; 76; 96. У всех этих чисел цифра десятков нечетная.

***Пример 11.*** Найти наибольший общий делитель всех шестизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений).

***Решение.*** Сумма цифр каждого такого числа равна 21, значит, каждое число делится на 3, но не делится на 9. Разность любой пары таких чисел делится на их наибольший общий делитель. Рассмотрим одну из таких разностей: $123465-123456=9$ . Значит, 9 делится на искомый НОД. Следовательно, это 3.

***Ответ:*** 3.

## *Упражнения для самостоятельного решения*

***1.*** К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

***2.*** К числу 97 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.

***3.*** К числу 13 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 36.

***4.*** В числе переставили цифры и получили число, которое в три раза меньше исходного. Докажите, что исходное число делится на 27.

***5.*** Сумма цифр натурального числа $A$ равна сумме цифр числа $3A$.
а) Доказать, что $A$ делится на 3.
б) Доказать, что $A$ делится на 9.
в) Верно ли, что $A$ обязательно делится на 27?

***6.*** Поставить вместо звездочек такие цифры, чтобы число $32{*}35717{*}$ делилось на 72 .

***7.*** В числе $4758967{*}$ дописать последнюю цифру так, чтобы оно делилось на 11.

***8.*** Доказать, что если $a, b, c, d$ – различные цифры, то число $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на число $\overline{aabb}$.

***9.*** Сумма двух цифр $a$ и $b$ делится на 7. Доказать, что число $\overline{aba}$ делится на 7.

***10.*** Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Доказать, что такое число делится на 7 тогда и только тогда, когда равны его цифры десятков и единиц.

***11.*** Доказать, что число $\overline{ababab}$ делится на 21.

***12.*** Трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37. Доказать, что сумма чисел $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ также делится на 37.

***Решения упражнений.***

***1.*** Для делимости на 15 достаточно, чтобы число делилось на 3 и на 5. Число делится на 5, значит оно оканчивается на 0 или на 5. Если справа приписать 0, то слева можно приписать 3, 6 или 9 (тогда сумма цифр полученного числа будет делиться на 3). Если справа приписать 5, то слева можно приписать 1, 4 или 7.

***Ответ:*** 1155; 3150; 4155; 6150; 7155; 9150.

***2.*** Для делимости на 45 достаточно, чтобы число делилось на 9 и на 5. Аналогично предыдущему заданию получаем ответ.

***Ответ:*** 2970; 6975.

***3.*** Для делимости на 36 достаточно, чтобы число делилось на 4 и на 9. Число делится на 4, значит двузначное число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4. Это двузначное число начинается с цифры 3, следовательно, последняя цифра – это 2 или 6. В каждом из этих случаев определим первую цифру четырехзначного числа, чтобы сумма всех цифр делилась на 9. Тогда получим ответ.

***Ответ:*** 3132; 8136.

***4.*** Пусть исходное число – это $x$, а после перестановки цифр – $y$. Тогда $x=3y$. Отсюда число $x$ кратно 3. Значит и $y$ тоже кратно 3 (у них сумма цифр одна и та же). Но тогда $3y$ кратно 9, то есть $x$ кратно 9. Отсюда $y$ тоже кратно 9. Но тогда $3y$ кратно 27, то есть $x$ кратно 27, что и требовалось доказать.

***5.*** Задача сходна с предыдущей. а) и б): Пусть сумма цифр числа $A$ равна $S$. Поскольку $3A$ делится на 3, то $S$ делится на 3, тогда и $A$ делится на 3. Следовательно, $3A$ делится на 9 и $S$ делится на 9, то есть $A$ делится на 9.
в) Не обязательно. Например, при $A$ = 9, «сумма» его цифр равна 9 и сумма цифр числа 3А = 27 тоже равна 9. Но 9 не делится на 27.

***6.*** Решение аналогично ***примеру 3.***

***Ответ:*** 322357176.

***7. Указание:*** применить признак делимости на 11, находя суммы цифр на четных и нечетных местах.

***Ответ:*** 47589671.

***8.*** Число $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на 11, поскольку сумма цифр, стоящих на нечетных местах равна $4c$, а на нечетных – $4d$, и разность $4c-4d=4\cdot(c-d)$ на 11 не делится. Число $\overline{aabb}$ делится на 11. Значит, $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на $\overline{aabb}$.

***9.*** $\overline{aba}=101a+10b=7\cdot(14a+b)+3(a+b)$. Это выражение, очевидно, делится на 7.

***10.*** $\overline{abc}=100a+10b+c=7\cdot(14a+b)+2a+3b+c=7\cdot(14a+b)+2\cdot(a+b+c)+b-c$. Равенство цифр $b$ и $c$ является необходимым и достаточным, чтобы число делилось на 7.

***11.*** Утверждение следует из того, что $\overline{ababab}=\overline{ab}\cdot 10101=\overline{ab}\cdot 37\cdot 273$.

***12.*** Рассмотрим сумму всех трех чисел, указанных в условии:

$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=(100a+10b+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b)=111\cdot(a+b+c).$$

Эта сумма делится на 37 (поскольку 111 делится на 37). По условию, число $\overline{abc}$ делится на 37. Значит, и сумма двух последних чисел $\overline{bca}+\overline{cab}=111\cdot(a+b+c)-\overline{abc}$ также делится на 37.